**El producto cruz es un IMPOSTOR – Por qué el producto externo es superior**

El producto cruz entre dos vectores u y v da como resultado un tercer vector que es perpendicular a los dos anteriores, y se denota u x v.

Su magnitud depende no solo de las magnitudes de los vectores u y v, sino de qué tan, entre comillas, “perpendiculares” sean estos entre sí. La magnitud del producto cruz es igual a la magnitud de u, por la magnitud de v, por el seno del ángulo entre ambos, haciendo que el producto cruz tenga varias aplicaciones importantes en la física.

Pero, ¿y si te dijera que el producto cruz es un IMPOSTOR?

**Parte 1: Contexto**

Hace un tiempo hice un video llamado “El origen del producto punto y producto cruz”. Si no lo has visto, te recomiendo que lo veas, porque es muy importante para lo que voy a decir en este video.

En todo caso, voy a hacer un pequeño resumen: todo comienza cuando un matemático llamado William Rowan Hamilton busca extender los números complejos a 3 dimensiones, y descubre que la extensión que busca debe ser de 4 dimensiones. Así nacen los cuaterniones, números que se forman combinando la unidad real, 1, y 3 unidades imaginarias, i, j y k, cuyas reglas de multiplicación son las siguientes: // mostrar reglas en pantalla

A la parte real le llamó “escalar”, y a la parte imaginaria que se forma con las 3 unidades i, j y k, le llamó “vector”. Hay que mencionar que el concepto de “vector” hasta ese entonces no existía en las matemáticas ni en la física, y Hamilton fue el que inventó el término.

Dos “vectores”, como les decía Hamilton, se pueden multiplicar, y usando las reglas de multiplicación para los cuaterniones, se obtiene el siguiente cuaternión. Su parte escalar es el opuesto de lo que ahora llamamos producto escalar, interno, o punto, mientras que su parte vectorial es lo que ahora llamamos producto vectorial o cruz.

Además, multiplicar dos vectores paralelos retorna un escalar puro que es menos el producto de sus magnitudes, mientras que si son perpendiculares el resultado es un “vector” puro perpendicular a ambos, cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los dos vectores. Así, si queremos multiplicar dos vectores cualesquiera, podemos tomar uno de ellos y descomponerlo en una parte paralela al otro y en una perpendicular al otro, multiplicar las partes paralelas para obtener el escalar puro, que resulta ser el producto de las magnitudes de ambos vectores, por el coseno del ángulo entre ellos, y multiplicar las partes perpendiculares para obtener el vector puro, cuya magnitud es el producto de las magnitudes de ambos vectores, por el seno del ángulo. Curiosamente, esta magnitud equivale al área del paralelogramo que forman los vectores multiplicados.

Debido a que los “vectores” de Hamilton son cantidades con magnitud, dirección y sentido en 3 dimensiones, Hamilton propuso que se aplicaran los cuaterniones en la física, para representar esas cantidades tan importantes que ahora llamamos “vectores”, como la fuerza y la velocidad. Sin embargo, esta idea no podía funcionar, porque los cuaterniones representan en esencia rotaciones, algo muy distinto a lo que normalmente representan los vectores modernos.

Pero ambos productos, el escalar y el vectorial, se quedaron cuando se inventaron los vectores tal y como los conocemos hoy día. Y mientras que el producto escalar o punto fue un gran acierto que funciona bastante bien, el producto vectorial o cruz fue un grave error que solo trae malentendidos. ¿Por qué? Porque muchas de las principales aplicaciones del producto cruz tienen que ver con rotaciones, y como ya dije antes, las rotaciones son muy diferentes a los vectores.

Un ejemplo de ello es el torque, el cual es como la fuerza, pero rotacional. Tiene que ver con cómo una fuerza hace rotar a un cuerpo alrededor de un eje. Por ejemplo, cuando empujas una puerta, le aplicas una fuerza que la hace rotar. La rotación depende de la magnitud de la fuerza, pero también del radio, o la distancia entre el eje de rotación y el punto donde aplicas la fuerza. Esta cantidad que llamamos “torque” se calcula como el producto entre este radio y la fuerza aplicada. Pero hay un detalle: esto solo si la fuerza es perpendicular al radio. Si se aplica en otra dirección que no sea la perpendicular, entonces no hace tanto torque. En el caso extremo en el que es paralela al radio, no hay torque.

En general, se puede descomponer la fuerza en una parte paralela a la distancia y otra parte perpendicular. La parte paralela no aporta en nada al torque, así que solo consideramos la perpendicular, cuya magnitud es la magnitud de la fuerza, por el seno del ángulo entre la fuerza y la distancia. Esta es la que se debe multiplicar por la magnitud del radio.

Así, el torque se calcula como el producto entre las magnitudes de la fuerza y la distancia a la que se aplica la fuerza, por el seno del ángulo entre ambos vectores.

Esto parece calzar bien con el producto cruz, porque la magnitud de este es precisamente esta expresión, así que podemos expresar el torque como el producto cruz entre el radio y la fuerza. De esta manera, el torque se expresa como… un vector que es perpendicular al plano que forman el radio y la fuerza.

Seguro que la primera vez que viste esto, te pareció raro que el torque, algo que es esencialmente una rotación, se representara así, con un vector que apunta hacia afuera.

Claro, si lo piensas un poco, puedes decir que este vector en verdad representa el eje de rotación de este cuerpo, y en verdad eso tiene algo de sentido.

Pero al final, esta idea de representar una rotación con un vector tiene varios problemas muy profundos.

**PARTE 2: Vectores =/= rotaciones**

La mayoría de los vectores con los que trabajamos normalmente, son por ejemplo la fuerza, la posición, la velocidad, la aceleración, el moméntum lineal, etc. Todos ellos tienen algo en común: están relacionados con la idea de la traslación. De una u otra forma, describen tu posición o el cambio en tu posición a lo largo del tiempo. Ahora, todas estas cantidades apuntan en una dirección: hacia abajo, hacia la derecha, etc. Intuitivamente, estas cosas las representaríamos con flechas que apunten en esa dirección. Para este propósito, usamos los vectores.

Pero luego tenemos cosas como el torque, el ángulo, la velocidad angular, la aceleración angular, el moméntum angular, etc. Todas estas cantidades están relacionadas con la idea de la rotación. Ya no estamos hablando de movernos a través del espacio en una dirección, como en los ejemplos anteriores. La rotación es más bien moverse alrededor de un mismo lugar. Es un concepto muy distinto al de la traslación. ¿Cómo lo representarías?

Para muchos de nosotros, lo más intuitivo sería representar la rotación con flechas curvadas que vayan dando vueltas en la dirección de la rotación. Estas flechas yacen en un plano, que sería el plano de rotación. Se podría decir que este plano sería el más importante para describir la rotación, porque visiblemente todos los puntos van girando en este plano. Y es por eso, que a muchos de ustedes les puede chocar que en la física se representen las rotaciones con un vector perpendicular al plano, que actúa como el eje de rotación. Puede tener sentido si lo piensas, pero no deja de sentirse poco natural.

Pero el problema va más allá de si esta representación no se siente tan natural.

Muchas veces estudiamos la rotación en 2D, porque en varias situaciones no necesitamos estudiar las 3 dimensiones, nos basta con tener un plano, 2 dimensiones, para describir una rotación. En este plano 2D se encuentran las cosas que rotan. Ahora dime, ¿es posible tener un eje de rotación aquí?

Pues la respuesta es no, porque para tener un eje que sea perpendicular a un plano, necesitamos como mínimo 3 dimensiones. Y es aquí donde la idea de que el eje representa mejor una rotación se empieza a caer. No es posible tener un eje de rotación en 2D, y realmente no lo necesitamos: este plano por sí solo es suficiente.

Algo similar le pasa al producto cruz: este retorna un vector perpendicular al plano que forman otros dos vectores, pero en verdad esta idea no es posible en 2 dimensiones. El producto cruz está bien definido solo en 3 dimensiones, y es que su misma construcción, sus mismas reglas que indican cómo deben multiplicarse los vectores unitarios, todo eso está definido solo en 3 dimensiones.

¿Qué pasa si tenemos 4 dimensiones o más? La cuestión se pone más compleja, pero lo explicaré con una analogía: imagina una línea recta. En 1 dimensión, no existe ninguna recta que sea perpendicular a esta. Pero en 2 dimensiones sí, se puede dibujar una recta perpendicular, pero solo existe una dirección que puede tener esta recta. En cambio, si tenemos 3 dimensiones, hay infinitas direcciones que puede tener la recta. Todas estas direcciones forman un plano, y decimos que todo este plano es perpendicular a la recta.

Algo parecido pasa con un plano: en 2 dimensiones, no existe ninguna recta perpendicular a este plano. En 3 dimensiones sí existe, pero solo puede ser en una dirección. En cambio, en 4 dimensiones, hay infinitas direcciones que puede tener esta recta. De nuevo, aquí se forma todo un plano que es perpendicular al nuestro. En 5 dimensiones esto es peor: tenemos todo un espacio tridimensional de rectas perpendiculares a nuestro plano. Como ya no hay una única dirección en la que puede ir nuestra recta perpendicular, no podemos definir bien el producto cruz en esos casos. Y algo similar le pasa a las rotaciones: en 4 dimensiones o más, no es posible definir un eje de rotación. De nuevo, solo podemos usar planos para describir rotaciones, y de nuevo esos son lo más importante para describirlas, no un eje.

Ahora, puede que me digas, “ya, pero ¿quién estudia 4 dimensiones? En nuestra realidad solo tenemos 3”. Bueno, por una parte, tenemos a los matemáticos que buscan entender cómo se siguen comportando las cosas cuando tenemos una cantidad n cualquiera de dimensiones espaciales, buscando encontrar reglas más generales y abstractas que apliquen a todos los casos. En ocasiones eso puede ayudar a entender mejor nuestra propia realidad en 3 dimensiones. Pero si buscas algo un poco más “aplicado”, en física, en el área de la relatividad, se trabaja mucho con la idea del “espacio-tiempo”: habitamos en una realidad con 4 dimensiones: 3 de ellas espaciales y 1 temporal. Este modelo surge de la idea de que el tiempo no es algo absoluto, sino que depende también del espectador. A su vez, esta idea surge de que la velocidad de la luz en el vacío es constante, sin importar quién la observe y a qué velocidad vaya, algo completamente diferente de objetos clásicos. La luz es una onda electromagnética, una perturbación en el campo eléctrico y en el magnético. Y adivina: en la fórmula para el campo magnético y la fuerza electromagnética, hay productos cruz. Y la cosa no termina ahí: se han propuesto modelos con más dimensiones: 5, 7, o incluso 11. Si bien estos modelos no han podido ser comprobados experimentalmente, explican muy bien tanto el electromagnetismo y la relatividad como otros fenómenos, como la gravedad o la interacción nuclear fuerte y débil en los átomos. Para más detalles, puedes ver este video de la física Sabine Hossenfelder que lo explica. Pero lo más importante a rescatar aquí, es que se estudian mucho en física varios modelos con más de 3 dimensiones. Modelos en donde pueden aparecer cosas rotacionales que estamos expresando con productos cruz, como el campo magnético. Y ahí es algo grave que el producto cruz falle. Más adelante veremos cómo se soluciona ese problema.

Así que, en resumen, el producto cruz solo funciona en 3 dimensiones, y al mismo tiempo solo en 3 dimensiones tiene sentido hablar de un eje de rotación. En cualquier otra cantidad de dimensiones, todo eso falla. La cosa aquí es un poco más profunda de lo que parece. Los vectores se pueden construir a partir de otros vectores base. Lo más común es que sean ciertos vectores unitarios que sean perpendiculares: por ejemplo, i tongo, j tongo y k tongo en tres dimensiones, que serían los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), y (0, 0, 1). Algo similar pasa con las rotaciones: se pueden construir a partir de ciertas rotaciones base. Ahora, para describir estas rotaciones requerimos un plano, que se puede definir a partir de 2 vectores, y para ello podemos usar los mismos ejes X, Y, Z, etc. Por ejemplo, en 2 dimensiones tenemos solo 2 ejes, X e Y, así que solo podemos construir una rotación base: la del plano XY. En 3 dimensiones, con los ejes X, Y y Z, hay que preguntarse, ¿cuántas veces podemos seleccionar 2 de esos 3 ejes para armar un plano? La respuesta es el número combinatorio 3 sobre 2, que es 3, o sea que hay 3 planos sobre los cuales podemos armar rotaciones base: XY, XZ e YZ. En 4 dimensiones, si tenemos 4 ejes que llamamos X, Y, Z y W, ¿cuántas veces podemos seleccionar 2 de esos 4 ejes? Pues 4 sobre 2 veces, que es igual a 6. Podemos armar 6 planos: XY, XZ, XW, YZ, YW y ZW.

¿Ves el patrón? En general, si tenemos n dimensiones, la cantidad de rotaciones base que podemos armar es n sobre 2, y este número es igual a n\*(n-1)/2. Mientras tanto, la cantidad de vectores base es simplemente n. El único caso en donde ambas cantidades son iguales, es cuando n = 3, cuando tenemos 3 dimensiones. Esa sería la razón por la que hemos estado confundiendo las rotaciones con los vectores: solo en 3 dimensiones podemos asociar una rotación con un vector, pero en todos los demás casos no se puede. Todo este rato en que hemos estado confundiendo ambas, en realidad eran las matemáticas jugándonos una mala broma.

Antes de terminar con esta idea, quiero agregar algo final.

Aun si después de todo esto, insistimos en usar vectores como ejes de rotación, aunque sea solo en 3 dimensiones, siguen ocurriendo anomalías.

Por ejemplo, imagina que tenemos esta rueda en la que le aplicamos una fuerza en un punto. La fuerza en sí y la distancia respecto del centro las representamos con estos vectores, y el torque resultante en la rueda la representamos con este vector como eje de rotación. ¿Qué pasa si reflejamos este sistema en un espejo?

Pues, la fuerza y el vector posición se reflejan como esperaríamos, nada raro pasa ahí. En cambio, el vector que representa el torque, además de reflejarse, se invierte. Y es que para obtener la dirección en donde apunta el torque, usamos la regla de la mano derecha. Al reflejar la fuerza y la posición, se invierte su orden relativo, y es por eso que el producto cruz se invierte. Aún así, esto se ve muy extraño… al menos hasta que recuerdas que este vector representa una rotación, y ahí las cosas tienen más sentido: es evidente que si reflejas una rotación en un espejo, esta también se invierte. Esto tiene sentido, y a la vez nos dice que algo no está bien cuando representamos la rotación con un vector.

Por cierto, como dato curioso, este tipo de vectores que, al reflejarse, también se invierten, se conocen como “pseudovectores”. La raíz “pseudo” viene del latín y significa “falso”. O sea, falsos vectores.

Y es por todo lo anterior, que no podemos fingir que los vectores pueden representar bien las rotaciones. Hamilton estaba equivocado cuando insistió en que sus cuaterniones podrían equipararse a las cantidades con dirección en la física, porque los cuaterniones están relacionados con rotaciones al ser una extensión de los números complejos. Sus cuaterniones actuaban más bien como pseudovectores. Y Hamilton cayó en esta trampa, precisamente porque sus vectores eran 3D, la cantidad de dimensiones en donde ambas entidades se confunden. Las consecuencias de ello las vemos ahora, en el producto cruz, que esencialmente representa una rotación, pero se hace pasar por un vector: en otras palabras, el producto cruz es un impostor.

Entonces, si una rotación no se debe representar con un vector, ¿cómo la representamos?

**Parte 3: El producto externo**

Permíteme introducir algo llamado “producto externo”. Este producto lo que hace es tomar dos vectores y devolver un objeto completamente distinto, llamado “bivector”. Mientras los vectores son segmentos orientados, unidimensionales, los bivectores son \*superficies planas\* orientadas, algo bidimensional. Y mientras que la magnitud de un vector es el largo del segmento, la magnitud de un bivector es el área de la superficie.

La manera en que funciona el producto externo es la siguiente: tomas dos vectores, construyes un paralelogramo con ellos, y este paralelogramo va a ser la base para el bivector. Ahora, la orientación del bivector la da el primer vector que se mencione en el producto. Si digo “u flecha v”, entonces u es el vector que me da la orientación, en este caso antihoraria. Pero si digo “v flecha u”, entonces es v el que me da la orientación del bivector, que es horaria. Ambos bivectores son parecidos, pero tienen orientaciones opuestas, así que uno es el opuesto del otro. v flecha u, es opuesto a u flecha v. Es decir, el producto externo es anticonmutativo, igual que el producto cruz.

Pero en ambos casos, la magnitud del producto es el área de este paralelogramo, que es la magnitud de u, por la magnitud de v, por el seno del ángulo entre ambos vectores.

Así que, si volvemos al problema del torque, si ahora en vez de usar el producto cruz, decimos que es el producto externo entre el radio y la fuerza, entonces el torque se representa con este bivector. No solo el bivector está en el mismo plano en el que rota el cuerpo, sino que su orientación nos dice directamente en qué sentido rota. Podemos decir que este bivector captura mucho mejor la idea de la rotación. Y todo esto, sin requerir una tercera dimensión.

Y hablando de eso, ¿cómo funciona este producto en n dimensiones? Pues el bivector es un objeto que se encuentra en el plano que determinan estos dos vectores. Y no importa si son 2, 3, 10 o 1000 dimensiones, en todos los casos dos vectores no paralelos siempre determinan un y solo un plano, y siempre se puede construir un único paralelogramo con estos dos vectores. Entonces, a diferencia del producto cruz que solo existe en 3 dimensiones, el producto externo se puede definir en cualquier cantidad de dimensiones.

Ahora hablemos de cómo hacer cálculos con este producto. De ahora en adelante, en vez de decirles i, j y k a los vectores unitarios, les voy a decir x, y y z.

Si multiplicamos un vector consigo mismo, el resultado es 0, igual que con el producto cruz. Pero aquí es más obvio por qué: dos vectores paralelos no pueden formar una superficie. El área del bivector resultante es 0.

En cambio, si multiplicamos vectores distintos, por ejemplo, multiplicar x por y nos da… simplemente x por y. No hay más, no tiene otro nombre. Lo mismo con y por z, y x por z. Estos tres resultados son los “bivectores unitarios base”, y es que todos ellos tienen área 1, y combinándolos podemos formar todos los bivectores en el espacio 3D.

Ya que estamos en eso, ¿cómo se suman los bivectores?

El producto externo es distributivo.

// Explicar por qué

Además, ambos productos preservan el producto por escalar. De nuevo, en el producto externo, esto es más evidente, porque claro que escalar uno de los vectores termina escalando el área por el mismo factor.

Estas dos propiedades

Sabiendo que ambos productos son asociativos por ambos lados, ahora podemos calcular los productos de dos vectores cualquiera. Para el producto cruz, expresa ambos vectores en términos de i, j y k, y multiplícalos término por término, como si fueran números reales. Luego, para cada término, aplica la regla que corresponda. Los términos de la diagonal tienen ixi, jxj o kxk, así que todos se cancelan. Para el resto de los términos, debes transformar cada producto